2020-2021 ÖĞRETİM YILI MAT211 ANALİZ III (1. ve 2 grup)
FİNAL SINAVI SORULARININ ÇÖZÜMLERİ

① a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx + \int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$

$[0,\pi/2]$ aralığında $f(x)=\frac{\sin x}{x^{3/2}} > 0$ dır. Bölüm Testine göre,

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^{3/2}}}{\frac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 > 0$ ve $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{1/2}}$ $(p=1/2)$ yakınsak

olduğundan $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ yakınsak ve mutlak yakınsaktır.

$[\pi/2, \infty)$ aralığında $\left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right| \le \frac{1}{x^{3/2}}$, $\int_{\pi/2}^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ yakınsak

olduğundan $\int_{\pi/2}^\infty \left|\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right| dx$ yakınsaktır $\Rightarrow \int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$ mutlak

yakınsak ve dolayısıyla $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$ mutlak yakınsaktır.

b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+6x+13}$ paydayı sıfır yapan $x\in\mathbb{R}$ yoktur.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+(x+3)^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{4+(x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{r\to-\infty} \arctan\left(\frac{x+3}{2}\right)\Big|_r^0 + \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty} \arctan\left(\frac{x+3}{2}\right)\Big|_0^r$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{3}{2} - \arctan(-\infty) + \arctan(\infty) - \arctan\frac{3}{2}\right]$$

$= \arctan\infty = \pi/2 \Rightarrow$ integral yakınsak

② a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{ax^n}{n^2+1}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{ax^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{ax^n}\right| = |ax|$, $a>0$

olduğundan $a.|x|<1$ için seri yakınsaktır.

$a.|x|<1 \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{a} \Leftrightarrow -\frac{1}{a}<x<\frac{1}{a}$

Yakınsaklık aralığı $(-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$, Yakınsaklık kümesi $[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}]$ dır.

b) $x\neq 0$, ortak çarpanı $\frac{1}{1+x^2}$ olan geometrik seridir.

Bu serinin toplamı $S_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^2 . \frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2 = S(x)$ dır.

$S(0)=1+0^2 \Rightarrow S(0)=1$, $S_n(x) = (1+x^2).\left[1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n\right] \Rightarrow S_n(0)=0$ dır.

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, $S(0)=1\neq 0 = S_n(0)$ olduğundan $S(x)$ fonksiyonu

$x=0$ noktasında süreksizdir. Dolayısıyla $x=0$ noktasını içeren aralıkta düzgün yakınsak olamaz. Bununla birlikte $x=0$ ı kapsamayan aralıkta düzgün yakınsaktır.

(3) Tanımlar ders notlarında var.

$G=\{x\in\mathbb{R} : -x^2+4x-3<0\}$ $\quad -x^2+4x-3=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$

x	$-\infty$		1		3		∞
$-x^2+4x-3$		$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$	

$G=(-\infty,+1)\cup(3,\infty)$ dır.

G sınırlı değildir, açık kümedir.

Dolayısıyla G kompakt değildir.

$V_1=(-\infty,1)$, $V_2=(3,\infty)$ seçilirse,

$V_1\cap G\neq\phi$, $V_2\cap G\neq\phi$, $V_1\cup V_2\subset G$, V_1,V_2 açık kümeler,

$V_1\cap V_2=\phi$ koşullarını sağlayan V_1,V_2 bulunabildiği için

G kümesi bağlantılı değildir.

(4) $\left|\dfrac{\cos nx}{n^3}\right|\leq\dfrac{1}{n^3}$, $\sum\frac{1}{n^3}$ serisi yakınsak olduğundan

Weierstrass M-testine göre verilen $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^3}$ serisi $\forall x\in\mathbb{R}$ için

düzgün yakınsaktır. $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}$ fonksiyonları

sürekli olduğundan verilen seri terim terim integrallenebilirdir.

Yani, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos nx}{n^3}\,dx$ yazılır.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos nx}{n^3}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}\Bigg]_0^{\pi/2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi/2}{n^4}=\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^4}$$

(5) $x_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n \text{ tek}\\ 3^{1/n+2}, & n \text{ çift}\end{cases}$

$(x_n)=(x_1,x_2,x_3,\dots)$

$=\left(\frac{1}{2},3^{1/4},\frac{1}{2},3^{1/6},\dots\right)$

k	1	2	3	4	5	6	7	...
M_k	$3^{1/4}$	$3^{1/4}$	$3^{1/6}$	$3^{1/6}$	$3^{1/8}$	$3^{1/8}$	$3^{1/10}$	...
m_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...

$M_k=\sup\{x_n : n\geq k\}=\sup\{x_k,x_{k+1},\dots\}$

$=\begin{cases}3^{1/k+3}, & k \text{ tek}\\ 3^{1/k+2}, & k \text{ çift}\end{cases}$

$\lim\limits_n\sup x_n=\lim\limits_{k\to\infty}M_k=1$

$m_k=\inf\{x_n : n\geq k\}=\inf\{x_k,x_{k+1},\dots\}$

$=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_n\inf x_n=\lim\limits_{k\to\infty}m_k=\frac{1}{2}$

6-) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n^3+1}, \frac{\pi\cdot 3^n}{1+3^n}\right) = (0,\pi)$ olduğunu tanımdan yararlanarak gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq n_0$ olduğunda $\| a_n - (0,\pi) \| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var mı?

$$\| a_n - (0,\pi) \| = \left\| \left(\frac{\ln n}{n^3+1}, \frac{\pi\cdot 3^n}{1+3^n} \right) - (0,\pi) \right\|$$

$$= \left\| \left(\frac{\ln n}{n^3+1}, \frac{-\pi}{1+3^n} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\ln n}{n^3+1}\right)^2 + \left(\frac{-\pi}{1+3^n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(\ln n)^2}{(n^3+1)^2} + \frac{\pi^2}{(1+3^n)^2}}$$

$$\overset{(*)_1}{<} \sqrt{\frac{n^2}{(n^3+1)^2} + \frac{\pi^2}{(1+3^n)^2}}$$

$$\overset{(*)_2,\ (*)_3}{<} \sqrt{\frac{n^2}{n^6} + \frac{\pi^2}{3^{2n}}}$$

$$\overset{(*)_4}{<} \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^2}{n^2}}$$

$$< \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{n^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\pi^2}}{n}$$

$$\leq \frac{\sqrt{1+\pi^2}}{n_0} < \varepsilon$$

$(*)_1$ $\ln n < n$

$(*)_2$ $(n^3+1)^2 > (n^3)^2$

$\frac{1}{(n^3+1)^2} < \frac{1}{n^6}$

$(*)_3$ $(1+3^n)^2 > (3^n)^2$

$\frac{1}{(1+3^n)^2} < \frac{1}{3^{2n}}$

$(*)_4$ $3^n > n$

$3^{2n} > n^2$

$\frac{1}{3^{2n}} < \frac{1}{n^2}$

$(*)_5$ $n^4 > n^2$

$\frac{1}{n^4} < \frac{1}{n^2}$

$$\frac{n_0}{\sqrt{1+\pi^2}} > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{n_0}{1} > \frac{\sqrt{1+\pi^2}}{\varepsilon}$$

$$n_0 = \left[\left| \frac{\sqrt{1+\pi^2}}{\varepsilon} \right|\right] + 1 \in \mathbb{N}.$$